

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} -4 \ln x = -\infty$ et par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à \mathcal{C}_f au voisinage de 0.

- b. On a puisque $x > 0$, $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{6}{x} = 1$ (par somme de limites), puis
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, d'où
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$ (par produit de limites); enfin
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc finalement :
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. a. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}.$$

- b. Comme $x > 0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2 - 6x + 4$ ou plus simplement du trinôme $x^2 - 3x + 2$.

Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où $f'(x) < 0$

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où elle est décroissante.

On a $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln 1 = 0 - 5 = -5$ et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln 2 = 4 \ln 2 - 8 \approx -5,23$.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	-5	$\ln(2) - 8$	$+\infty$

3. • On a $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln 4 = -8 + 8 \ln 2 \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln 25 = 4 \ln 5 - 5 \approx 1,44$;

• Sur l'intervalle $[4; 5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante de $f(4) < 0$ à $f(5) > 0$, donc :

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4; 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$.

a. On a $2x^2 - 4 = 0 \iff 2(x^2 - 2) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x + \sqrt{2} = 0 \\ x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ ou ici puisque $x > 0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$. Conclusion :

- Sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$, $f''(x) < 0$, la fonction f est concave;
 - Sur l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, $f''(x) > 0$, la fonction f est convexe;
 - $f''(\sqrt{2}) = 0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln \sqrt{2} = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2 = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln 2$ est le point d'inflexion de \mathcal{C}_f , car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
- b. • Pour $k \in]0; \sqrt{2}[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[AM_k]$ est en dessous de \mathcal{C}_f .
- Pour $k \in]\sqrt{2}; +\infty[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[AM_k]$ est au-dessus de \mathcal{C}_f .